



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu rația $\frac{1}{3}$, iar termenii a_1 și a_n sunt numere naturale nenule. Știind că suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice este 2010, se cere:

- Să se determine n .
- Să se determine numărul termenilor din sumă care sunt numere naturale.

Milu Cărmaciu, profesor, Galați

Problema 2. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația : $\frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]}$.

($[x]$ și $\{x\}$ sunt partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x)

* * *

Problema 3. Fie mulțimea $M = \{x^2 + y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

- Să se demonstreze că $2011 \notin M$ și $2048 \in M$.
- Să se demonstreze implicația: $(\forall) p \in M, (\forall) q \in M \Rightarrow p \cdot q \in M$.
- Să se determine submulțimile finite M' ale mulțimii M , cu proprietatea:
 $(\forall) p \in M', (\forall) q \in M' \Rightarrow p \cdot q \in M'$.

Prelucrare Constantin Ursu, profesor, Galați

Problema 4. Fie triunghiul $\triangle ABC$ și punctele M, N, P, Q astfel încât:

$\overrightarrow{BM} = \alpha \cdot \overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{CP} = \beta \cdot \overrightarrow{PA}$; $\overrightarrow{AQ} = \gamma \cdot \overrightarrow{QB}$; $\overrightarrow{BN} = m \cdot \overrightarrow{CN}$, unde α, β, γ și m sunt numere reale strict pozitive. Se cere:

- Dacă $\alpha = \beta = \gamma$, să se demonstreze că triunghiul $\triangle ABC$ are același centru de greutate ca și triunghiul $\triangle MPQ$.
- Să se determine relația dintre numerele α, β, γ astfel încât dreptele AM, CQ, BP să fie concurente.
- Dacă $NQ \cap (AC) = \{S\}$, atunci sa se determine raportul în care punctul S împarte segmentul (AC) .

Constantin Ursu, profesor, Galați

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.